SBWL Tourismusanalyse und Freizeitmarketing, Vertiefungskurs 2

1. Teil: Zerlegungsmodelle und naive Prognosemethoden für Zeitreihen

Regina Tüchler
Thomas Rusch

Inhalt

Einleitung

1. Einführung in das Modellieren von Zeitreihen
   1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung
   1.2. Das stochastische Modell

2. Zeitreihendatensätze für diese LV

3. Einführung in R

UE. Übungen 1

Inhalt

4. Empirische Momente von Zeitreihendaten
   4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm
   4.2. Stationarität

5. Empirische Momente in R

Inhalt

6. Das klassische Komponentenmodell

7. Zeitreihen ohne Trend und ohne Saisonalität
   7.1. Gleitender Durchschnitt
   7.2. Exponentielles Glätten

8. Einfache Filterverfahren in R

UE. Übungen 2

Einleitung

Im Mittelpunkt des ersten Teils dieser LV steht die Analyse und Prognose von Zeitreihen (ZR) mit Hilfe von sogenannten naiven Methoden. Dabei wird nur die Information aus der einen ZR im Verfahren verwendet. Es werden verschiedene Strukturen dieser ZR wie z.B. Trend oder Saison modelliert, um die zukünftige Entwicklung vorherzusagen.

Beispiel: Anhand von Tourismusdaten über monatliche Nächtigungszahlen in Österreich für die Jahre 1995-2003 sollen die Werte für 2004 vorhergesagt werden.

Inhalt

9. Zeitreihen mit Trend

9.1 Lineare und nichtlineare Trends
9.2. Transformation der Daten
9.3. Holt Verfahren

10. Holt Verfahren in R

UE. Übungen 3

Einleitung

Auf die Anwendung und Demonstration der Methoden anhand von Beispielen wird in dieser LV großer Wert gelegt. Damit die Studierenden, die Methoden selber anwenden können, wird die Free and Open-Source Software `R (GNU S)` verwendet.

Zu jedem Thema gibt es einen theoretischen Teil, der immer anhand von Beispielen erklärt wird. Es folgt dann ein Kapitel, in dem gezeigt wird, wie die Verfahren mit R durchgeführt werden können. Am Schluss von jedem Thema gibt es ein Kapitel mit Übungsbeispielen, die den Studierenden helfen sollen, den Stoff selbständig zu üben.

Inhalt

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

11.1. Methode der kleinen Trends
11.2. Saison-Trend Zerlegung mittels gleitendem Durchschnitt
11.3. Holt-Winters Verfahren

12. Saison-Trend Modellierung in R

UE. Übungen 4

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

Daten

Entstehen durch Beobachtung von Variablen (Merkmalen)

Zeitreihendaten

Beobachtung eines Merkmals zu verschiedenen Zeitpunkten
z.B. tägliche Temperaturmessung, monatliche Nächtigungszahlen in einem Hotel

Querschnittdaten

Beobachtung eines Merkmals an verschiedenen Untersuchungseinheiten aus einer Grundgesamtheit
z.B. Bewertung eines Produkts durch Konsumenten in einer Marktforschungsstudie

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

Eigenschaften von Zeitreihendaten

- Messung eines Merkmals zu verschiedenen Zeitpunkten
- feste Ordnung der Beobachtungen nach der Zeit
- Beobachtungen sind in der Regel nicht unabhängig
- zu jedem Zeitpunkt liegt nur eine Beobachtung vor

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

Zeitreihenplot

Er ist der Ausgangspunkt einer statistischen Analyse. Mit Hilfe dieser grafischen Darstellung kann man einen Eindruck über die Struktur der Daten gewinnen. Daher ist der Zeitreihenplot der wichtigste Ausgangspunkt, wenn man ein geeignetes Modell finden möchte.

Beispiele:

In Abb. 1 sehen wir einen Zufallsprozess. Die Beobachtungen sind hier unabhängig.[1]

[1] Sie kommen aus einer Normalverteilung mit Mittelwert 0, Varianz 4.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

In der ZR aus Abb. 2 ist deutlich ein linearer Trend erkennbar. In Abb. 3 sehen wir eine ZR mit einem quadratischen Trend, in Abb. 4 weist die ZR eine deutliche Saisonalität auf und in Abb. 5 ist sowohl ein Trend als auch eine Saisonalität enthalten. Wenn man die ZR aus Abb. 2-5 modellieren will, müssen die jeweils speziellen Strukturen der ZR im Modell berücksichtigt werden. Wir werden daher Modelle kennen lernen, die Trend und/oder Saisonalität enthalten.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

In Abb. 6 sehen wir eine ZR, die ihre Struktur ab dem Jahr 1983 deutlich ändert. Wenn man so eine ZR analysiert, ist es daher angebracht zusätzliche Hintergrundinformation, die den Bruch erklären kann, zu sammeln. In diesem Beispiel ist 1983 die Gurtenpflicht eingeführt worden. Mit solchen Reihen muß man geeignet umgehen. Je nach Anwendung kann man die Daten in 2 Datensätze unterteilen oder ein Regressionsmodell verwenden, das auch den Parameter über die Gurtenpflicht enthält (2. Teil dieser LV) oder eigene Strukturbruchmodelle verwenden.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

In Abb. 7 sind einige untypische Datenpunkte zu beobachten, sogenannte Ausreißer. Die Ausreißer könnten die Analyse verzerren und es ist daher auch hier sinnvoll, zusätzliche Informationen einzuholen. Sind diese Ausreißer aus Anwendersicht erklärbar? Kann es sich um Messfehler handeln? Dann wären Korrekturmöglichkeiten je nach Anwendung angebracht, z.B. Ersetzen durch Schätzwert oder Weglassen der Ausreißer (bei Querschnittdaten).

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

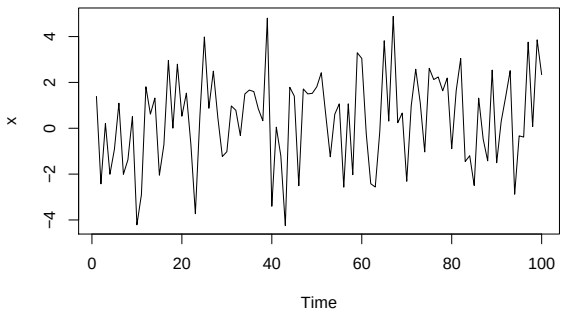


Abbildung 1: Zufallsprozess.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

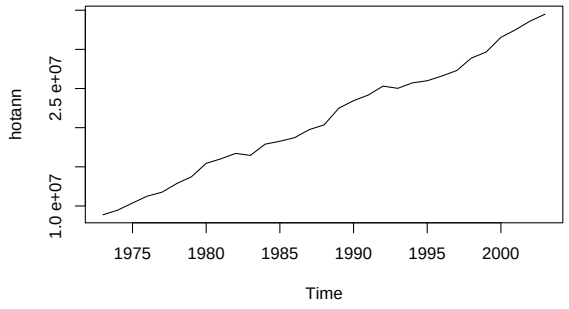


Abbildung 2: Jährliche Nächtigungen in 4/5 Sterne Hotels (A).

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

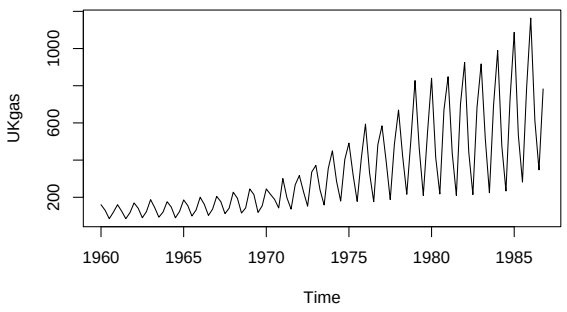


Abbildung 5: Erdgasverbrauch in GB.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

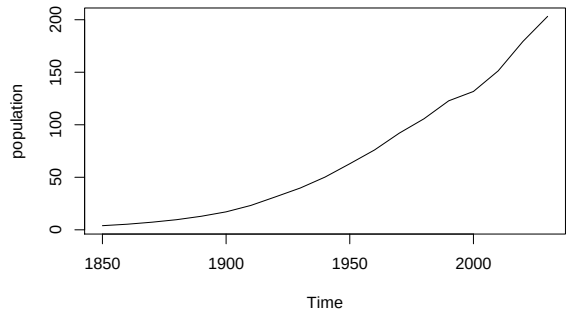


Abbildung 3: US Bevölkerungszahlen.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

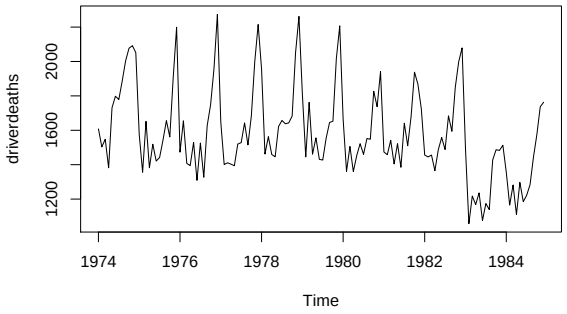


Abbildung 6: Verkehrstote bzw. Schwerverletzte in GB.

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

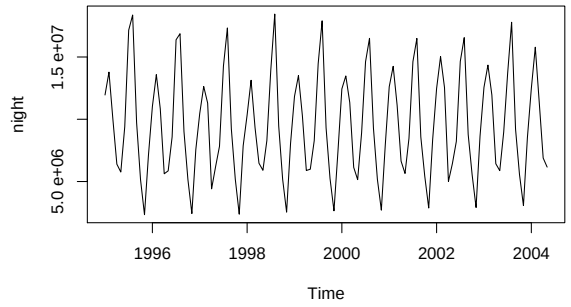


Abbildung 4: Monatliche Nächtigungen in Österreich.

2. Zeitreihendatensätze für diese LV

Überblick über die Datensätze, die im ersten Teil dieser LV verwendet werden:

Nil-Daten: LV-Seite: "`nil.rda`"
Zeitreihe mit dem Wasserstand des Nils bei Assuan für die Jahre 1901 bis 1970.

Approve-Daten: LV-Seite: "`approve.rda`"
Ausschnitt aus dem R-Datensatz `presidents`, über die Zustimmung der US Bürger zu ihrem Präsidenten für die Jahre 1953-1971 (Quartalsdaten).

1.1. Zeitreihendaten und ihre grafische Darstellung

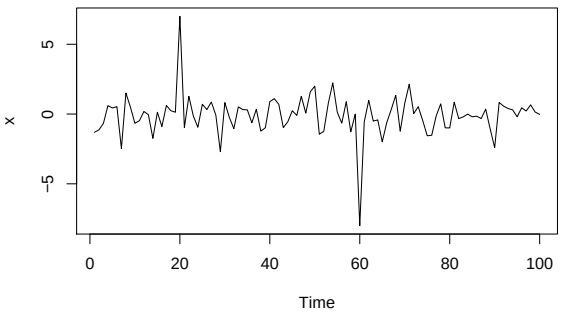


Abbildung 7: ZR mit Ausreißern.

2. Zeitreihendatensätze für diese LV

Hotel-Daten: LV-Seite: "`hotelts-annual.rda`"
Daten über die Anzahl an Übernachtungen in österreichischen 4/5-Sterne-Hotels pro Jahr für den Zeitraum 1973-2003.

US Bevölkerungszahlen: In R: `data(uspop)`
Einwohnerzahlen der USA 1790-1970 (Zehnjahresdaten).

Austres: In R: `data(austres)`
Einwohnerzahlen Australiens für 2. Quartal 1971 - 2. Quartal 1993.

Nächtigungsdaten: LV-Seite: "`nightts-monthly.rda`"
Die ZR enthält Tourismusdaten über die Anzahl an Übernachtungen in allen österreichischen Unterbringungsformen pro Monat (Zeitraum Jän. 1995 - Mai 2004).

1.2. Das stochastische Modell

Das deterministische Modell

Exakte quantitative Beziehung zwischen Variablen (Merkmalen)

z.B. deterministische Nachfrage/Preis Relation:
$N = \beta_1 + \beta_2 p$ oder $N = \beta_1 p^{\beta_2}$

Das stochastische Modell

Durch zufallsabhängigen Fehlerterm ε verschleierte quantitative Beziehung zwischen den Variablen

z.B. stochastische Nachfrage/Preis Relation:
$N = \beta_1 + \beta_2 p + \varepsilon$ oder $N = \beta_1 p^{\beta_2} \varepsilon$

Übungen 1

1. "EinfinR.pdf": Installieren Sie R auf ihrem PC und probieren Sie die dortigen Befehle aus.

2. Laden Sie die Nil-Daten von der LV-Seite. (Befehl: `load(''nil.rda'')`. Die Daten müssen dafür im Working Directory abgespeichert worden sein). Zeichnen Sie einen Zeitreihenplot.

2. Zeitreihendatensätze für diese LV

UKgas: In R: `data(UKgas)`
Erdgaskonsum in UK für 1960-1986 (Quartalsdaten).

CO_2**-Daten:** In R: `data(co2)`
Datensatz mit monatlichen CO_2-Messungen für 1959-1997.

USAccDeaths: In R: `data(USAccDeaths)`
Daten über monatliche tödliche Unfälle in den USA in den Jahren 1973-1978.

4. Empirische Momente von ZR

Im Allgemeinen wird sich das Verhalten einer ZR über die Zeit ändern, z.B. Trend, saisonales Verhalten, sich verändernde Variabilität.

Eine ZR wird als **stationär** bezeichnet, wenn sich ihr Verhalten über die Zeit nicht systematisch ändert. Dies ist die intuitive Idee von Stationarität, eine mathematische Definition folgt später.

Beispiele: In Abb. 1 ist eine stationäre ZR gegeben. Die ZR in Abb. 2-5 ändern ihr Verhalten im Laufe der Zeit und sind daher nicht stationär.

3. Einführung in R

Um die Methoden dieser LV auf dem Computer zu rechnen, werden wir das Programmpaket texttR verwenden. Diese Software kann für Linux, MacOS und Windows Plattformen unter der URL

`http://www.R-project.org/`

heruntergeladen werden. Aktuell ist die Version `2.7.2`. In "EinfinR.pdf" von der LV-Seite stehen Anleitungen für die ersten Schritte in R, wie wir sie in dieser LV brauchen werden.

4. Empirische Momente von ZR

In der Grundvorlesung Statistik haben wir den (empirischen) **Erwartungswert** kennen gelernt. Er wurde dort für unabhängige Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_T$ einer Zufallsgröe X als Durchschnitt über die Datenpunkte definiert:

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t.$$

z.B. Körpergröße der 30 Kinder einer Schulklasse: die 30 Messungen sind Realisationen der Zufallsvariablen "Körpergröße", $\bar{x}$ ist die durchschnittliche KG.

4. Empirische Momente von ZR

Erwartungswert bei ZR:

Bei ZR liegen nun keine voneinander unabhängigen Größen vor. Das Verhalten der ZR kann sich systematisch ändern.

Der Erwartungswert $\bar{x}$ kann nur bei stationären ZR sinnvoll die Lage der Daten angeben, nicht aber bei systematischen Änderungen, wie z.B. Trend. So besitzt die durchschnittliche Zahl an Übernachtungen für die Hotel-Daten $(21\,121\,178)$ keine Aussagekraft über den Verlauf dieser ZR.

4. Empirische Momente von ZR

Die (empirische) **Varianz** von unabhängigen Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_T$ einer ZG X wurde definiert als:

$$s_x^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2.$$

Auch die Varianz kann nur bei stationären ZR sinnvoll als Maßzahl für die Streuung der Daten verwendet werden, nicht aber bei systematischen Änderungen.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

Da bei einer ZR die einzelnen Datenpunkte über die Zeit im Allgemeinen abhängig sind, definieren wir im folgenden eine Maßzahl für diese Abhängigkeit. Es geht dabei darum, den Zusammenhang zwischen der Beobachtung am Zeitpunkt t und den Beobachtungen an vergangenen Zeitpunkten $t-1, t-2, \ldots$ zu messen .

Die (empirische) **Autokovarianz** einer stationären ZR ist definiert als:

$$c_\tau = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-\tau}(x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}).$$

Sie ist für Verzögerungen (Lags) $\tau = 0, 1, \ldots, T-1$ definiert.
c_0 ist gleich der Varianz der Daten.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

Die **Autokovarianzfunktion** ordnet jedem Lag $\tau = 0, 1, \ldots, T-1$ den Wert der Autokovarianz c_τ zu.

Die Autokovarianz ist eine Maßzahl, die von der Skala abhängt. Im folgenden wird daher eine Maßzahl definiert, die skalenunabhängig ist.

Die (empirische) **Autokorrelation** kann aus den Autokovarianzen berechnet werden:

$$r_\tau = c_\tau / c_0$$

Die **Autokorrelationsfunktion** ordnet jedem Lag $\tau = 0, \ldots, T-1$ den Wert der Autokorrelation zu.

Das **Autokorrelogramm** plottet die Autokorrelationsfunktion.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

Eigenschaften der Autokorrelation[2]:

- $r_0 = 1$
- $-1 \leq r_\tau \leq 1$
- Der Betrag von r_τ misst die Stärke des Zusammenhangs.
- Das Vorzeichen gibt die Richtung des Zusammenhangs an: $r_\tau > 0$ bedeutet, dass auf große Werte von x_t auch große Werte von $x_{t+\tau}$ folgen (analog für kleine). Bei $r_\tau < 0$ folgen auf große x_t kleine $x_{t+\tau}$ und umgekehrt.

[2] Vgl. Korrelationskoeffizient in der Grundvorlesung Statistik

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

Anwendung des Autokorrelogramms:

- Neben dem Zeitreihenplot ist das Autokorrelogramm eine wichtige grafische Darstellung, um ein adäquates Modell für eine ZR zu finden. Es wird dabei für die Rohdaten (also auch für nicht stationäre ZR) eingesetzt. Am Muster kann man Hinweise für die Wahl des Modells bekommen.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

Beispiele: In Abb. 2 hatten wir ein Beispiel für eine trendbehaftete ZR. Das dazugehörige Autokorrelogramm in Abb. 8 zeigt diesen Trend auch. Man sieht hier die positiven Autokorrelationen, die abklingen und erst ab einem Lag von 7 nicht mehr signifikant sind.

In Abb. 9 sieht man die Saisonaliät der ZR aus Abb. 4 auch im Autokorrelogramm.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

- Prüfung auf Unkorreliertheit:
  ZR, deren Zeitpunkte nicht miteinander korreliert sind, spielen bei der Modellbildung eine wichtige Rolle. Für empirische Daten wird die Autokorrelation in der Regel von 0 verschieden sein, auch wenn tatsächlich keine Korrelation zwischen den Zeitpunkten besteht. In diesem Fall kann man mit 95%-iger Sicherheit davon ausgehen, dass die Autokorrelationen r_τ zwischen $\pm 2/\sqrt{T}$ liegen. Diese Grenzen können ins Autokorrelogramm eingezeichnet werden, sodass Autokorrelationen, die diese Grenze überschreiten, leicht erkannt werden können.[3]

[3] Erinnern sie sich dazu an die Durchführung von statistischen Tests aus der Grundvorlesung Statistik

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

Beispiel: In Abb. 1 hatten wir einen Zufallsprozess mit voneinander unabhängigen Zeitpunkten. Im dazugehörige Autokorrelogramm, Abb. 10, liegen daher auch alle Autokorrelationen innerhalb der eingezeichneten Signifikanzgrenzen.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

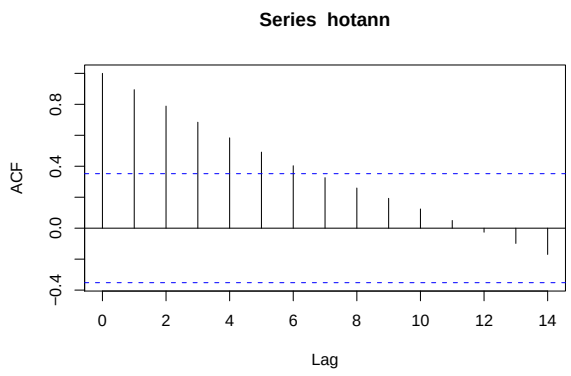


Abbildung 8: Autokorrelogramm der Hotel-Daten

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

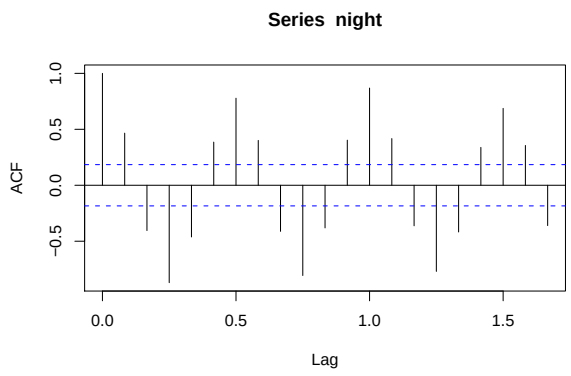


Abbildung 9: Autokorrelogramm der Nächtigungs-Daten

4.2. Stationarität

Bei der Modellbildung werden wir oft einen stationären Zufallsprozess ε_t verwenden, für den gilt:

- $E(\varepsilon_t) = 0$
- $\gamma_\varepsilon(\tau) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = \{ \begin{array}{ll} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array}$

D.h. die Autokorrelationen sind 0. Dieser Prozess heisst auch "White Noise".

Ein Beispiel für so einen stationären Zufallsprozess hatten wir in Abb. 1 und 10.

4.1. Autokorrelation, Autokorrelogramm

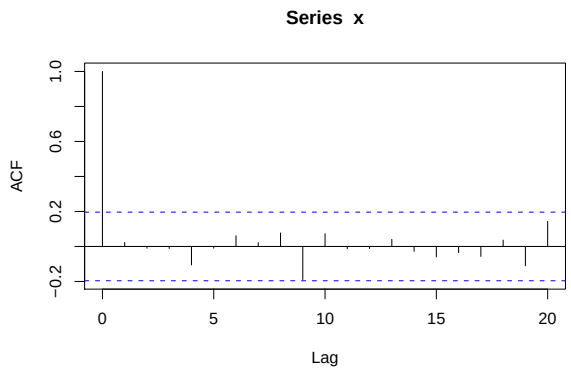


Abbildung 10: Autokorrellogramm d. Zufallsprozesses (Abb.1).

5. Empirische Momente in R

In "EmpirMomenteinR.pdf" wird beschrieben, wie man die empirischen Momente in R berechnet und wie man ein Autokorrelogramm zeichnet.

4.2. Stationarität

Ein stochastischer Prozess ist eine Folge von Zufallsvariablen X_t für Zeitpunkte $t = 1, 2, \ldots$. Die konkreten ZR sind endlich viele Realisationen von diesem Zufallsprozess: $x_1, \ldots, x_T$.

Mathematische Definition von Stationarität:

Ein stochastischer Prozess X_t ist (schwach) stationär, wenn

- $E(X_t) = \mu$ von t unabhängig ist
- $Cov(X_t, X_{t+s}) = \gamma_X(s)$ von t unabhängig ist, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Erwartungswert und Varianz sind also endlich und konstant über die Zeit.[4]

[4] streng stationäre Prozesse haben identische Verteilung unabhängig von t

6. Das klassische Komponentenmodell

Gegeben sei eine ZR (x_t) für die Zeitpunkte $t = 1, \ldots, T$. Im **additiven klassischen Komponentenmodell** wird sie folgendermaßen zerlegt:

$$x_t = \hat{m}_t + \hat{s}_t + \varepsilon_t$$

$\hat{m}_t$ ist die Trendkomponente für die langfristige systematische Änderung des Niveaus.

$\hat{s}_t$ ist die Saisonkomponente. Man nimmt hier eine Periodenlänge p an, z.B. $p = 12$ bei Monatsdaten.
Weiters gilt, dass sich die einzelnen Saisonkomponenten über die Jahre nicht verändern:

$$\hat{s}_{t+p} = \hat{s}_t$$

6. Das klassische Komponentenmodell

und dass die Summe über alle Saisonkomponenten 0 ist:

$$\sum_{k=1}^{p} \hat{s}_k = 0.$$

In den Saisonkomponenten ist daher keine Information über das Niveau der ZR enthalten, sondern nur über die saisonale Schwankung um dieses Niveau.

6. Das klassische Komponentenmodell

ε_t ist die Restkomponente (Residuen). Diese ist eine zufällige Störkomponente, die übrig bleibt, wenn man von der ursprünglichen ZR die Trend- und die Saisonkomponente abzieht. Sie entspricht daher der um Trend und Saison bereinigten ZR:

$$\varepsilon_t = x_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t$$

Die Störung ε_t ist stationär und nicht autokorreliert. Wir nehmen im folgenden an, dass das Niveau der ZR in der Trendkomponente $\hat{m}_t$ enthalten ist. Der Erwartungswert von ε_t ist dann gleich 0, die Varianz ist konstant. D.h. in der Restkomponente sind keine systematischen Einflüsse mehr enthalten.

6. Das klassische Komponentenmodell

In den nächsten Abschnitten werden wir Methoden zur Bestimmung der Trend- und der Saisonkomponenten kennen lernen. Die Methode soll so gewählt werden, dass die Restkomponente keine systematischen Einflüsse enthält.

Wir werden bei diesen Verfahren die ZR $(x_t), t = 1, \ldots, T$ glätten, d.h. irregluäre Schwankungen werden weggefiltert.

Ziel der Verfahren ist es, **Prognosen** über das zukünftige Verhalten der ZR zu erstellen. Wir werden in den folgenden Abschnitten die Prognosefähigkeit der Verfahren für verschiedenen Szenarien untersuchen.

7. Zeitreihen ohne Trend und Saisonalität

In diesem Abschnitt wird das Niveau einer ZR modelliert. Wir gehen dabei von einem Modell aus, das die ZR in eine konstante Niveaukomponente und eine zufällige Restkomponente aufteilt.

Wir werden dazu zunächst lineare Filter definieren. In Abschnitt 7.1. werden wir einen Spezialfall eines linearen Filters -die Methode des gleitenden Durchschnitts- kennen lernen und ihre Glättungseigenschaften untersuchen.

Das Verfahren des exponentiellen Glättens ist ebenfalls ein spezieller linearer Filter und ist für die Prognose von ZR, die keinen Trend und keine Saisonalität enthalten, geeignet (Abschnitt 7.2.).

6. Das klassische Komponentenmodell

Vorgangsweise bei der Analyse von ZR:

1. Schritt: Zeitreihenplot der Daten

2. Schritt: Welche Muster sind erkennbar? Gibt es Trend, Saison? Sind Ausreißer oder Brüche erkennbar? Sollen die Daten transformiert werden? Welche Methoden können gewählt werden?

3. Schritt: Modellschätzung (Ziel sind stationäre Residuen)

4. Schritt: Modellwahl, Modellprüfung und Residuenanalyse

Falls 4. nicht zufriedenstellend:

5. Schritt: andere Methode und Vergleich der Methoden

7. Zeitreihen ohne Trend und Saisonalität

Die Nil-Daten:

In Abb. 11 ist ein Zeitreihenplot über den Wasserstand des Nils bei Assuan für die Jahre 1901 bis 1970 dargestellt. Diese Daten weisen keinen Trend und keine Saisonalität auf. Ein passendes Prognosemodell muss daher das zukünftige Niveau vorhersagen. Daher ist hier ein Modell geeignet, das zufällige Schwankungen um ein konstantes Niveau enthält.

6. Das klassische Komponentenmodell

Je nachdem welche Gestalt eine ZR hat, kann das Komponentenmodell vereinfacht werden.

Abschnitt 7: Es wird nur das Niveau der ZR modelliert.

Abschnitt 9: Es wird nur die Trendkomponente modelliert.

Abschnitt 11: Es werden Trend- und Saisonkomponenten modelliert.

7. Zeitreihen ohne Trend und Saisonalität

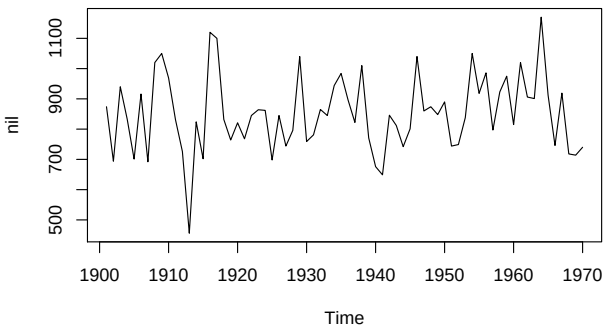


Abbildung 11: Die Nil-Daten.

7.1. Gleitender Durchschnitt

Linearer Filter:
Ein linearer Filter transformiert eine ZR (x_t), $t = 1, \ldots, T$ in eine gefilterte ZR (y_t):

$$y_t = a_{-q}x_{t+q} + a_{-q+1}x_{t+q-1} + \ldots + a_{s-1}x_{t-s+1} + a_s x_{t-s}$$
$$t = s+1, \ldots, T-q$$

$a_{-q}, \ldots, a_s$ sind Konstanten.

7.1. Gleitender Durchschnitt

Einfacher gleitender Durchschnitt:
Er ist ein linearer Filter mit symmetrischem Zeitfenster $[t-q, \ldots, t+q]$:

$$y_t = \sum_{u=-q}^{q} a_u x_{t-u}, \quad t = q+1, \ldots, T-q$$

mit den Gewichten

$$a_u = \frac{1}{2q+1} \quad u = -q, \ldots, q$$

7.1. Gleitender Durchschnitt

Ein einfaches Beispiel ist der Mittelwert aus allen Zeitpunkten x_t $(1, \ldots, T)$[5]:

$$\bar{x} = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{T} x_t$$

Der einfache gleitende Durchschnitt ist also das arithmetische Mittel über ein bestimmtes Zeitfenster.

[5] Für ungerades T

7.1. Gleitender Durchschnitt

Zur Anwendung des einfachen gleitenden Durchschnitts:

- Das Verfahren schätzt ein lokales Niveau der Zeitreihe indem der Durchschnitt über die Werte in $[t-q, t+q]$ gebildet wird.
- Die Glättung ist umso stärker, je mehr Terme einbezogen werden. Umso kürzer wird dann die gefilterte Reihe. Die Outputreihe hat um $2 \cdot q$ Zeitpunkte weniger als die Inputreihe.
- Beim einfachen gleitenden Durchschnitt werden schnelle Fluktuationen herausgefiltert, während langfristige lineare Trendänderungen in der geglätteten ZR erhalten bleiben.

7.1. Gleitender Durchschnitt

Einfacher gleitender Durchschnitt der Nil-Daten:

In Abb. 12 wird der einfache gleitende Durchschnitt für die Nil-Daten berechnet. Es werden dafür verschieden lange Zeitfenster verwendet. Man sieht deutlich, dass bei $q = 5$ die Glättung am stärksten ist, während bei $q = 1$ die Fluktuationen auch in der geglätteten Reihe noch viel stärker erkennbar sind.

7.2. Exponentielles Glätten

Der einfache gleitende Durchschnitt ist ein symmetrisches Filterverfahren, bei dem um den Zeitpunkt t ein symmetrisches Zeitfenster $[t-q, t+q]$ beim Glätten verwendet wird. Die Outputreihe wird daher an beiden Enden um q Werte kürzer.

Beim Verfahren des **exponentiellen Glättens** handelt es sich um ein rekursives Filterverfahren. Wir erhalten Outputwerte bis zum Endzeitpunkt T und können dieses Verfahren daher für eine Prognose über den Zeitpunkt T hinaus verwenden.

7.1. Gleitender Durchschnitt

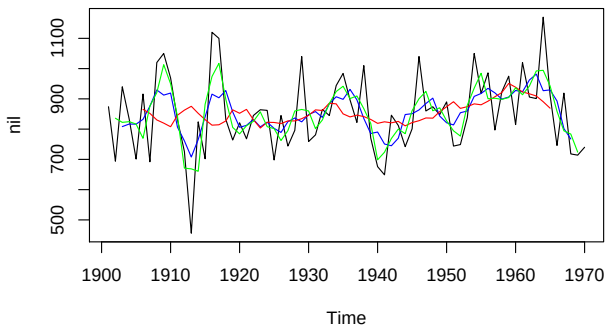


Abbildung 12: Einfacher gleitender Durchschn. für $q = 1, 2, 5$.

7.2. Exponentielles Glätten

Die Einschritt-Vorhersage zum Zeitpunkt t (Bez.: $\hat{x}_t(1)$) ist also jener Wert, der für den Zeitpunkt $t+1$ vorhergesagt wird. Er entspricht dem gewichteten Mittel aus der aktuellen Beobachtung x_t und aus der Einschritt-Vorhersage für den Zeitpunkt t: $\hat{x}_{t-1}(1)$.

Rekursion:

$$\hat{x}_t(1) = \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{x}_{t-1}(1), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Mit Startwert $\hat{x}_0(1) = x_1$. Der Glättungsparameter α liegt zwischen 0 und 1.

7.2. Exponentielles Glätten

Beim exponentiellen Glätten wird an die ZR ein lokales Niveau angepasst.

Es wird ein konstantes Niveau für zukünftige Zeitpunkte prognostiziert.

Das exponentielle Glätten ist daher nur zur Prognose von ZR geeignet, die keinen langfristigen Trend und keine saisonalen Schwankungen aufweisen.

7.2. Exponentielles Glätten

Wir bezeichnen das für den Zeitpunkt t geschätzte, lokale Niveau der ZR mit $\hat{a}_t$. Dann gilt:

$$\hat{x}_{t-1}(1) = \hat{a}_t.$$

$\hat{a}_{T+1}$ ist dann das über den Zeithorizont der ZR hinaus geschätzte Niveau, und entspricht der Prognose $\hat{x}_T(h)$, $h = 1, 2, \ldots$.

7.2. Exponentielles Glätten

Gegeben sei die ZR (x_t) für die Zeitpunkte $t = 1, \ldots, T$. Der geglättete Wert der ZR ist eine Einschritt-Vorhersage und wird mit $\hat{x}_t(1)$ bezeichnet.

Notation: $\hat{x}_t(h)$ heißt, dass zum Zeitpunkt t eine Vorhersage des Wertes der ZR für h Zeitpunkte in die Zukunft gemacht wird, also für den Zeitpunkt $t+h$.

7.2. Exponentielles Glätten

Das rekursive Verfahren:

Startwert:	$\hat{x}_0(1)$	$= \hat{a}_1$	$= x_1$
Rekursion:	$\hat{x}_1(1)$	$= \hat{a}_2$	$= \alpha x_1 + (1-\alpha)\hat{x}_0(1) = x_1$
	$\hat{x}_2(1)$	$= \hat{a}_3$	$= \alpha x_2 + (1-\alpha)\hat{x}_1(1)$
	$\vdots$		
	$\hat{x}_{T-1}(1)$	$= \hat{a}_T$	$= \alpha x_{T-1} + (1-\alpha)\hat{x}_{T-2}(1)$
Prognose f. T+1:	$\hat{x}_T(1)$	$= \hat{a}_{T+1}$	$= \alpha x_T + (1-\alpha)\hat{x}_{T-1}(1)$
Prognose f. T+h:	$\hat{x}_T(h)$	$= \hat{a}_{T+1}$	

7.2. Exponentielles Glätten

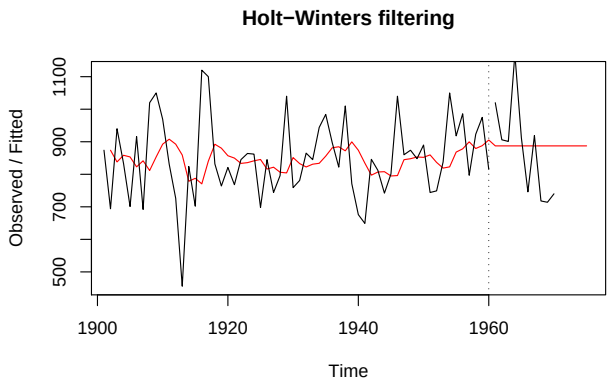


Abbildung 13: Exponentielles Glätten der Nil-Daten, $\alpha = 0.2$.

7.2. Exponentielles Glätten

Exponentielles Glätten der Nil-Daten:

Wir haben Daten über den Wasserstand des Nils bei Assuan für die Jahre 1901 bis 1970.

Die Nil-Daten der Jahre 1901-1960 wurden mit exponentiellem Glätten modelliert. Die Jahre 1961-1975 wurden vorhergesagt. Da hier Daten vorliegen, die keinen systematischen Trend und keine saisonalen Schwankungen aufweisen, liefert dieses Verfahren eine sinnvolle Prognose.

7.2. Exponentielles Glätten

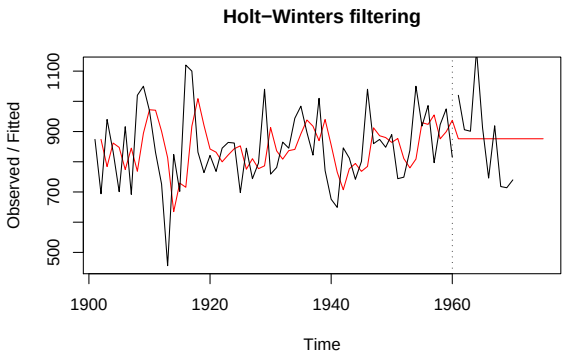


Abbildung 14: Exponentielles Glätten der Nil-Daten, $\alpha = 0.5$.

7.2. Exponentielles Glätten

Exponentielles Glätten der Hotel-Daten:

Wir haben Daten über die Anzahl an Übernachtungen in österreichischen 4/5-Sterne-Hotels pro Jahr für den Zeitraum 1973-2003.

Die Hotel-Daten in Abb. 15 weisen einen deutlichen Trend auf. Die Jahre 1973-1995 wurden zur Prognose der Jahre 1996-2005 verwendet. Man sieht deutlich, dass die Prognose eines konstanten Niveaus für Daten mit einem langfristigen Trend unpassend ist.

7.2. Exponentielles Glätten

Wahl des Glättungsparameters α beim exponentiellen Glätten der Nil-Daten:

In Abb. 13 wurde $\alpha = 0.2$ und in Abb. 14 wurde $\alpha = 0.5$ gewählt. Man sieht, dass die Glättung für den kleineren Wert von α viel stärker ist, denn da werden auch länger zurückliegende Werte stärker berücksichtigt.

7.2. Exponentielles Glätten

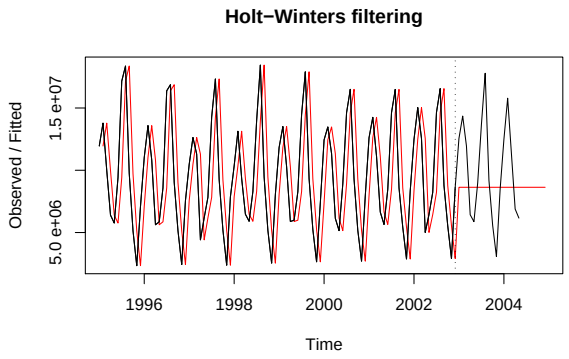


Abbildung 16: Exponentielles Glätten der Nächtigungs-Daten.

7.2. Exponentielles Glätten

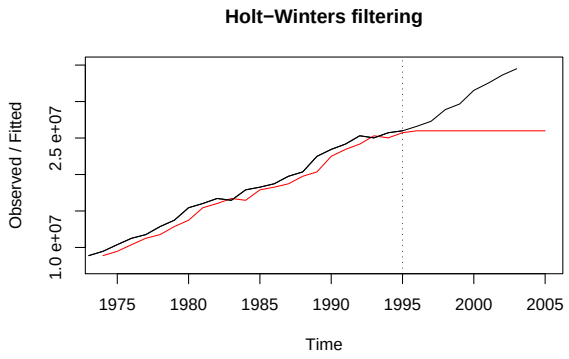


Abbildung 15: Exponentielles Glätten der Hotel-Daten.

7.2. Exponentielles Glätten

- Der Glättungsparameter α soll so gewählt werden, dass die Fehlerquadratsumme zwischen Einschritt-Vorhersage und wahrem Wert der ZR möglichst klein wird:

$$SSE(\alpha) = \sum_{t=m}^{T-1} (x_{t+1} - \hat{x}_t(1))^2 \rightarrow min$$

(m wird hier so groß gewählt, dass der Effekt des Startwertes vernachlässigbar ist.)

Oft wird aus $\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ jenes α gewählt, das die kleinste $SSE(\alpha)$ aufweist.

7.2. Exponentielles Glätten

Exponentielles Glätten der Nächtigungs-Daten:

Die ZR enthält Tourismusdaten über die Anzahl an Übernachtungen in allen österreichischen Unterbringungsformen pro Monat (Zeitraum Jän. 1995 - Mai 2004).

Die Daten in Abb. 16 weisen eine deutliche Saisonalität auf. Die Jahre 1995-2002 wurden zur Prognose der Jahre 2003-2004 verwendet. Man sieht deutlich, dass die Prognose eines konstanten Niveaus für Daten mit einer Saisonalität unpassend ist.

7.2. Exponentielles Glätten

- Für die Prognose ist wichtig, dass diese nur bei ZR ohne langfristigem Trend und ohne saisonale Schwankungen mit Hilfe des exponentiellen Glättens durchgeführt werden sollte. Der lineare Trend bleibt zwar bei der geglätteten ZR bis zum Zeitpunkt T erhalten. Prognostiziert wird bei diesem Verfahren aber nur ein konstantes Niveau. (Vgl. Abb. 15)

7.2. Exponentielles Glätten

Zur Anwendung des einfachen exponentiellen Glättens:

- Der Glättungsparameter α liegt zwischen 0 und 1.
- Die Glättung ist umso stärker, je näher der Glättungsparameter an 0 liegt. In diesem Fall werden auch länger zurückliegende Beobachtungen noch stärker berücksichtigt.
- Die letzte Beobachtung erhält ein umso größeres Gewicht, je näher der Glättungsparameter an 1 liegt. In diesem Fall spielen Beobachtungen, die schon länger zurück liegen eine geringe Rolle.

Übungen 2

4. Laden Sie die Daten ''approve.rda'' in das Arbeitsverzeichnis. Gehen Sie wie in Bsp. 3. vor. Die Daten der Jahre 1953-1971 sollen verwendet werden, um Werte für 1972 vorherzusagen. (Wir haben hier Quartalsdaten, daher müessen 4 Werte für 1972 vorhergesagt werden.) Beim exponentiellen Glätten soll $\alpha = 0.2$ gewählt werden. Vergleichen Sie mit einer alternativen Wahl $\alpha = 0.4$. Wie lautet Ihre Prognose für das 4. Quartal 1972?

5. Lassen Sie für die Daten aus Bsp. 4. den Glättungsparameter von R optimieren. Wie lautet die Prognose jetzt? Wie hat sich die Fehlerquadratsumme verändert?

8. Einfache Filterverfahren in R

Um in R die Methoden für das Glätten von ZR ohne Trend und Saisonalität durchzuführen, werden die Funktionen `filter` und `HoltWinters` verwendet.

Die Erklärung zur Anwendung stehen in "ExpGlaetteninR.pdf" und können von der LV-Seite heruntergeladen werden.

9. Zeitreihen mit Trend

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit ZR, die einen langfristigen linearen Trend, aber keine saisonalen Schwankungen, enthalten. Das zugrunde liegende Modell ist daher ein Modell das die ZR in eine konstante Niveau-, eine lineare Trendkomponente und eine zufällige Restkomponente zerlegt.

Übungen 2

Lösen Sie die folgenden Beispiele mit Hilfe von R:

1. Folgen Sie der Anleitung in "ExpGlaettinR.pdf" und rechnen Sie das Beispiel "Einfacher gleitender Durchschnitt der Nil-Daten" nach.

2. Laden Sie die Quartalsdaten ''approve.rda'' in das Arbeitsverzeichnis. Glätten Sie die ZR mit dem einfachen gleitenden Durchschnitt und wählen Sie einmal ein Fenster mit Breite 5 und dann ein Fenster mit Breite 9.

3. Folgen Sie der Anleitung in "ExpGlaettinR.pdf" und rechnen Sie das Beispiel "Exponentielles Glätten der Nil-Daten" nach.

9.1. Lineare und nichtlineare Trends

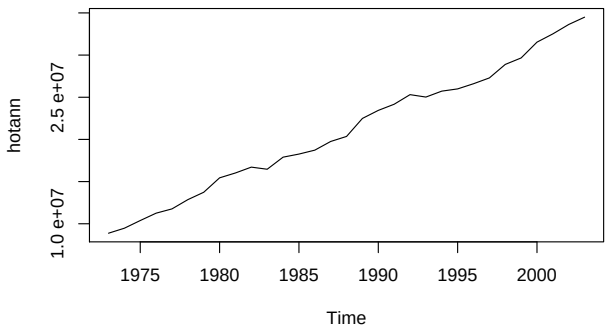


Abbildung 17: Zeitreihenplot Hotel-Daten.

9.1. Lineare und nichtlineare Trends

Die Hotel-Daten in Abb. 17 zeigen einen deutlichen linearen Trend. Man kann eine Gerade als Näherung an die Daten legen.

In diesem Abschnitt wird das Holt Verfahren hergeleitet. Es ist ein Verfahren, das Prognosen unter der Annahme eines linearen Trends ermglicht.

9.2. Transformation der Daten

Bei Daten, die einen Trend aufweisen, der aber nicht linear ist, kann eine Transformation dieser Daten sinnvoll sein.

Wir geben 2 Beispiele:

Die Daten in Abb. 18 zeigen einen nahezu quadratischen Trend. In Abb. 19 sehen wir die ZR, die sich als Wurzel aus den ursprünglichen Daten ergibt.

Die Daten in Abb. 20 zeigen einen nahezu exponentiellen Trend. In Abb. 21 wurden die Daten logarithmiert.

9.2. Transformation der Daten

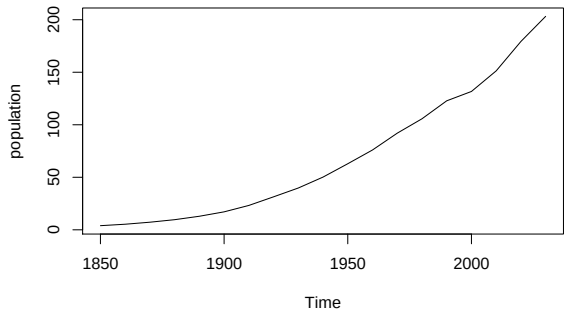


Abbildung 18: US population.

9.2. Transformation der Daten

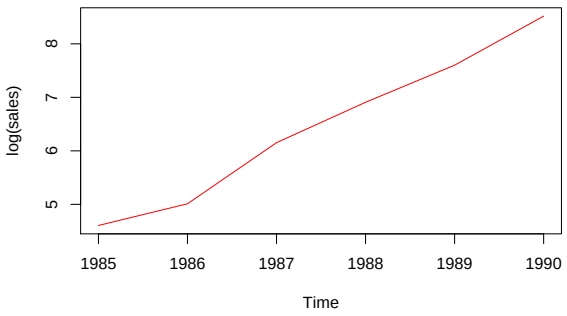


Abbildung 21: Transformation der Verkaufszahlen.

9.2. Transformation der Daten

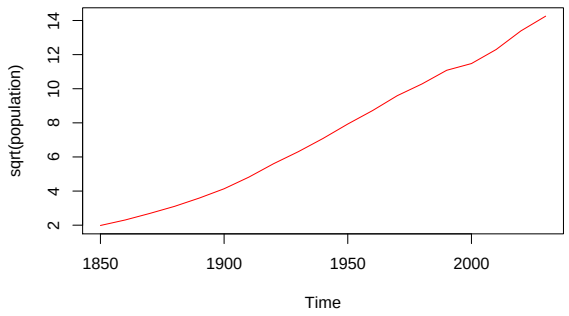


Abbildung 19: Transformation der US population.

9.3. Holt Verfahren

Das Verfahren des exponentiellen Glättens wird nun so erweitert, dass auch ZR, die einen langfristigen, linearen Trend enthalten, prognostiziert werden könnnen.

$$\hat{x}_T(h) = \hat{a}_{T+1} + \hat{b}_{T+1}h, \quad h = 1, 2, \ldots$$

Die Daten setzten sich hier aus einer Niveaukomponente $\hat{a}_{T+1}$ und einer linearen Trendkomponente $\hat{b}_{T+1}h$ zusammen.

9.2. Transformation der Daten

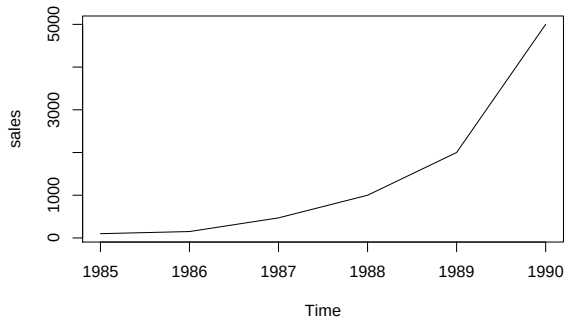


Abbildung 20: Verkaufszahlen einer Firma.

9.3. Holt Verfahren

Rekursion für $t = 3, \ldots, T$:

$$\hat{a}_t = \alpha x_{t-1} + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$$
$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}$$

Die Einschritt-Vorhersagen zum Zeitpunkt $t-1$ ergeben sich daher als Summe der Schätzwerte von Trend und Niveau:

$$\hat{x}_{t-1}(1) = \hat{a}_t + \hat{b}_t.$$

9.3. Holt Verfahren

Startwerte:	$\hat{a}_2 = x_1, \hat{b}_2 = x_2 - x_1$
Rekursion:	$\hat{a}_3 = \alpha x_2 + (1-\alpha)(\hat{a}_2 + \hat{b}_2) = x_2$
	$\hat{b}_3 = \beta(\hat{a}_3 - \hat{a}_2) + (1-\beta)\hat{b}_2 = x_2 - x_1$
	$\vdots$
	$\hat{a}_T = \alpha x_{T-1} + (1-\alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1})$
	$\hat{b}_T = \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{T-1}$
Prognose f. T+1:	$\hat{a}_{T+1} = \alpha x_T + (1-\alpha)(\hat{a}_T + \hat{b}_T)$
	$\hat{b}_{T+1} = \beta(\hat{a}_{T+1} - \hat{a}_T) + (1-\beta)\hat{b}_T$
Prognose f. T+h:	$\hat{a}_{T+h} = \hat{a}_{T+1}, \hat{b}_{T+h} = \hat{b}_{T+1} \cdot h$

9.3. Holt Verfahren

Holt Verfahren für die Hotel-Daten:

Die Hotel-Daten weisen einen Trend auf, der gut durch eine lineare Trendfunktion modelliert werden kann. In Abb. 22 werden die Jahre 1973-2000 für die Prognose von 2001-2005 verwendet. Wir sehen, dass die lineare Trendprognose die wahren Daten der Jahre 2001-2003 gut approximiert.

9.3. Holt Verfahren

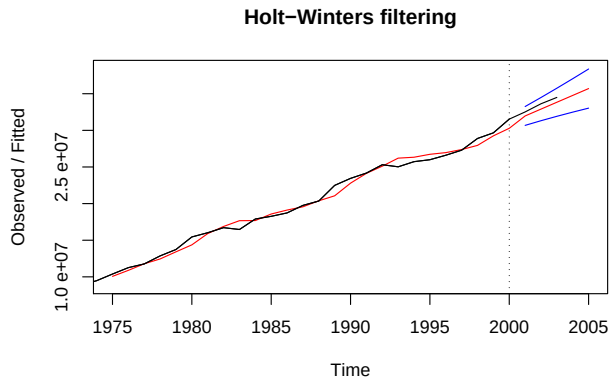


Abbildung 22: Holt-Verf. auf Hotel-Daten und Prognose für 2001-2005.

9.3. Holt Verfahren

- Die Glättungsparameter können auch wieder durch Minimierung der Fehlerquadratsumme zwischen Einschritt-Vorhersage und wahrem Wert der ZR geschätzt werden.

9.3. Holt Verfahren

Zur Anwendung des Holt Verfahrens:

- Approximiert eine ZR durch eine Niveau- und eine lineare Trendkomponente.
- Da die Prognosefunktion eine lineare Funktion in der Zeit ist, können nur ZR, die einen linearen Trend aufweisen, prognostiziert werden. Weder nichtlineare Trends, noch saisonale Schwankungen können vorhergesagt werden.
- Die Glättungsparameter α und β liegen zwischen 0 und 1.

10. Holt Verfahren in R

Um in R das Holt-Verfahren durchzuführen, wird die Funktion `HoltWinters` verwendet.

Die Erklärung zur Anwendung stehen in "HoltinR.pdf" und können von der LV-Seite heruntergeladen werden.

9.3. Holt Verfahren

- Für α nahe bei 0 gehen auch länger zurückliegende Beobachtungen noch stärker in die Niveauschätzung ein.
- Die letzte Beobachtung erhält ein umso größeres Gewicht bei der Niveauschätzung, je näher der Glättungsparameter α an 1 liegt.
- Für β nahe bei 0 geht die länger zurückliegende Trendentwicklung stärker in die aktuelle Trendschätzung ein.
- Die letzte Trendentwicklung erhält ein umso größeres Gewicht bei der Trendschätzung, je näher der Glättungsparameter β an 1 liegt.

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

In diesem Abschnitt geht es um ZR, die in eine Trend-, eine Saison- und eine Restkomponente zerlegt werden können. (Das Niveau sei in der Trendkomponente enthalten.)

Beispiele für solche ZR sind in Abb. 23 und Abb. 24 zu sehen. Es ist eine deutliche Saisonalität in den Daten erkennbar. Die bisherigen Verfahren zur ZR-Analyse sind nicht geeignet so ein saisonales Verhalten zu modellieren. Daher werden in diesem Abschnitt neue Verfahren hergeleitet, die sowohl Trend als auch Saisonalität berücksichtigen.

Übungen 3

Lösen Sie die folgenden Beispiele mit Hilfe von R:

1. Folgen Sie der Anleitung in "HoltinR.pdf" und rechnen Sie das dortige Beispiel nach.

2. Laden Sie die Daten "austres" in das Arbeitsverzeichnis. (Befehl: `data(''austres'')`, ist ein Datensatz, der im Package "stats" in R enthalten ist. Nähere Informationen können über `help(''austres'')` abgefragt werden.) Gehen Sie wie in Bsp. 1. vor. Die Daten der Jahre 1985 - 1989 sollen verwendet werden um Werte fuer 1990 -1993 vorherzusagen.

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

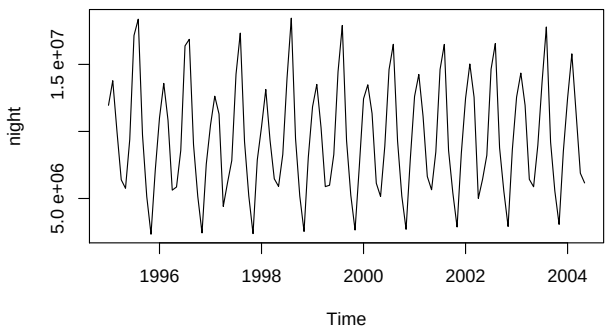


Abbildung 23: Zeitreihenplot der Nächtigungs-Daten.

Übungen 3

(Hinweis:
```
past <- window(austres, start=c(1985,1), end = c(1989,4)),
future <- window(austres, start = c(1990,1)) )
```

Wählen Sie die Glättungsparameter $\alpha = 0.4$ und $\beta = 0.2$. Wie lautet Ihre Prognose für das 2. Quartal 1993?

3. Lassen Sie für die Daten aus Bsp. 3. die Glättungsparameter von R optimieren. Welchen Wert bekommen α und β? Wie lautet die Prognose für das 2. Quartal 1993 jetzt? Wie hat sich die Fehlerquadratsumme für 1985-1989 verändert? Wie hat sich die mittlere Fehlerquadratsumme für 1990-2.Quartal 1993 verändert?

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

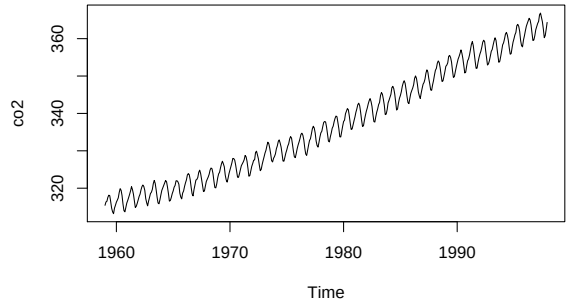


Abbildung 24: Zeitreihenplot der $C0_2$-Daten.

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

In Abschnitt 11.1. und 11.2. werden wir Methoden kennen lernen, die eine ZR gemäß dem additiven klassischen Komponentenmodell in eine Trend-, eine Saison- und eine Restkomponente zerlegen.

In Abschnitt 11.3. wird das Holt-Winters Verfahren zur Prognose von ZR, die Trend und Saisonalität aufweisen, behandelt. In diesem iterativen Algorithmus wird Niveau, Trend und Saisonalität rekursiv berechnet. Die Saisonkomponenten werden hier nicht über die Jahre konstant gehalten (wie es der Annahme im klassischen Komponentenmodell entspricht), sondern auch sie verändern sich über die Jahre.

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

Bei Daten, die einen nichtlinearen Trend und nicht konstante Saisonalität aufweisen, kann eine Transformation sinnvoll sein.

In Abb. 25 ist so ein Beispiel zu sehen (in `R` unter `AirPassengers` verfügbar). Der Trend und die saisonalen Schwankungen nehmen mit der Zeit zu. Ein Modell, das einen linearen Trend und eine über die Jahre konstante Saisonalität annimmt, wäre für diese Daten nicht passend.

Die Daten können über den Logarithmus transformiert werden. In Abb. 26 sehen wir den Zeitreihenplot der logarithmierten Daten. Der Trend ist hier annähernd linear und die saisonalen Abweichungen bleiben über die Jahre annähernd gleich.

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

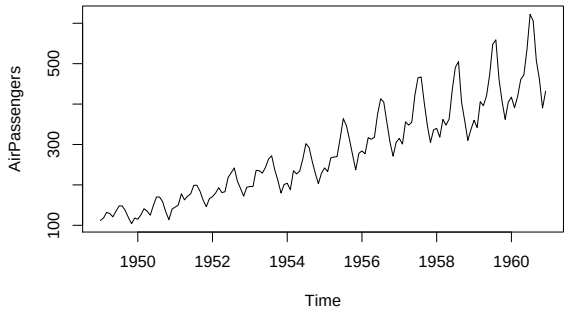


Abbildung 25: Zeitreihenplot der Flugpassagier-Daten.

11. Zeitreihen mit Trend und Saisonalität

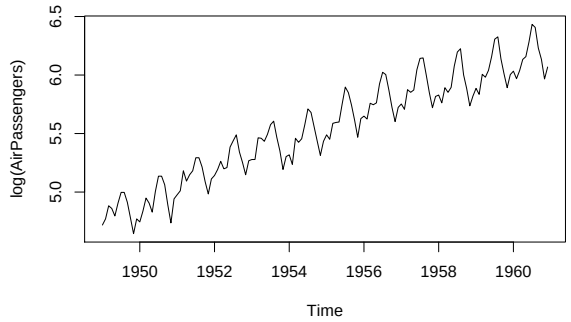


Abbildung 26: Logarithmierten Flugpassagier-Daten.

11.1. Methode der kleinen Trends

Diese Methode zerlegt eine ZR in eine Trend-, eine Saison- und eine Restkomponente.

Es sei eine ZR $(x_{j,k})$ gegeben. Der erste Index steht für das Jahr $j = 1, \ldots, J$ und der zweite Index steht für die Saison $k = 1, \ldots, p$. p ist daher die Periodenlänge z.B. 12 bei Monatsdaten, 4 bei Quartalsdaten.

$$x_{j,k} = \hat{m}_j + \hat{s}_k + \varepsilon_{j,k}$$

$\hat{m}_j$ ist der für das Jahr j geschätzte Trend.

$\hat{s}_k$ ist die saisonale Komponente für Saison k.

$\varepsilon_{j,k}$ ist die Abweichung zwischen dem wahren Wert der ZR und der Schätzung: $\varepsilon_{j,k} = x_{j,k} - (\hat{m}_j + \hat{s}_k)$.

11.1. Methode der kleinen Trends

Schätzung der Trendkomponente für jedes Jahr $j = 1, \ldots, J$:

$$\hat{m}_j = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{j,k}$$

Jeweils für ein ganzes Jahr wird ein konstanter Wert angenommen.

Schätzung der Saisonkomponente für jede Saison $k = 1, \ldots, p$ einzeln aus den um den Trend bereinigten Daten (z.B. aus allen bereinigten Jännerwerten, dann alle Februarwerte,..):

$$\hat{s}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} (x_{j,k} - \hat{m}_j)$$

11.1. Methode der kleinen Trends

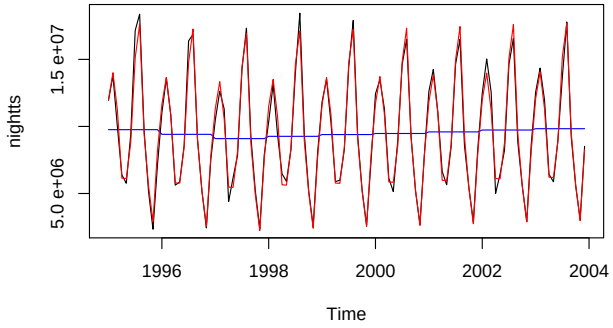


Abbildung 27: Methode d. kl. Trends für Nächtigungs-Daten.

11.2. Saison-Trend Zerlegung mittels Moving Average

Auch dies ist eine Methode zur Trend- und Saisonbereinigung. Die ZR (x_t), $t = 1, \ldots, T$ wird gemäß dem klassischen Komponentenmodell in den Trend $\hat{m}_t$, die Saison $\hat{s}_t$ und die Restkomponente ε_t zerlegt:

$$x_t = \hat{m}_t + \hat{s}_t + \varepsilon_t$$

11.1. Methode der kleinen Trends

Die Methode der kleinen Trends für die Nächtigungs-Daten:

Der ZR-Plot der Nächtigungs-Daten Abb. 23 zeigt ein nahezu konstantes Niveau über jeweils ein Jahr und eine deutliche Saisonalität, die sich aber über die Jahre hin kaum ändert. Eine Zerlegung gemäß dem klassischem Komponentenmodell kann daher mit der Methode der kleinen Trends erfolgen.

In Abb. 27 sieht man die Niveauschätzungen (blaue Linie) und die Schätzung der ZR (rot), die sehr nahe an den wahren Werten liegt.

11.2. Saison-Trend Zerlegung mittels Moving Average

Die Trendkomponente $\hat{m}_t$ wird mit Hilfe des gleitenden Durchschnitts (moving average (MA)) für $t = q+1, \ldots, T-q$ berechnet: für ungerade Periode $p = 2q+1$:

$$m_t = \frac{1}{p}(x_{t-q} + x_{t-q+1} + \cdots + x_{t+q-1} + x_{t+q})$$

für gerade Periode $p = 2q$:

$$m_t = \frac{1}{p}(0.5x_{t-q} + x_{t-q+1} + \cdots + x_{t+q-1} + 0.5x_{t+q})$$

11.1. Methode der kleinen Trends

Zur Anwendung der Methode der kleinen Trends

- Da für ein ganzes Jahr die Trendkomponente $\hat{m}_j$ als konstant angenommen wird, ist diese Zerlegung nur für Daten sinnvoll, die kaum einen jährlichen Trend aufweisen.
- Da die Saisonkomponenten $\hat{s}_k$ für die einzelnen Saisonen über die Jahre immer gleich bleiben, bietet das Modell eine geringere Flexibilität als andere Verfahren (z.B. Holt-Winters).

11.2. Saison-Trend Zerlegung mittels Moving Average

Wie bei der Methode der kleinen Trends werden die saisonalen Komponenten $\hat{s}_k$ für jede Saison k einzeln aus den um den Trend bereinigten Daten geschätzt (z.B. aus allen bereinigten Jännerwerten, dann alle Februarwerte,..). Zeitpunkte:

$$\hat{s}_k = \frac{1}{J-2} \sum_{j=2}^{J-1} (x_{k+(j-1)p} - \hat{m}_{k+(j-1)p})$$

Anmerkungen: Die Bedingung $\sum_{k=1}^{p} \hat{s}_k = 0$ muss nicht notwendigerweise erfüllt sein, in diesem Fall werden die $\hat{s}_k$ entsprechend umgerechnet und die $\hat{m}_t$ nochmals geschätzt.
Da beim MA in $\hat{m}_t$ im ersten und im letzten Jahr Zeitpunkte wegfallen, werden diese beiden Jahre hier in der Summe weggelassen.

11.2. Saison-Trend Zerlegung mittels Moving Average

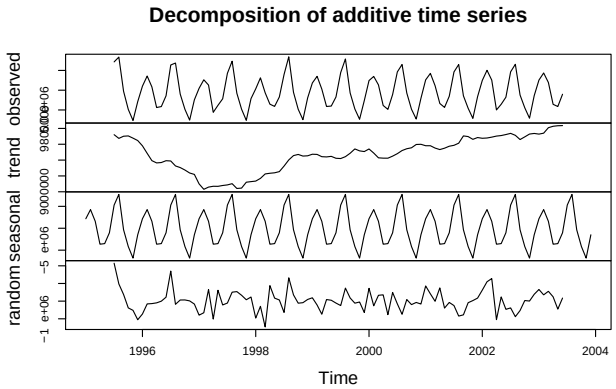


Abbildung 28: Saison-Trend Zerl. Nächtigungs-Daten mit MA.

11.2. Saison-Trend Zerlegung mittels Moving Average

Die Saison-Trend Zerlegung der Nächtigungs-Daten mittels MA:

In Abb. 28 sieht man der Zerlegungsformel $x_t = \hat{m}_t + \hat{s}_t + \varepsilon_t$ entsprechend zeilenweise die ZR x_t, $\hat{m}_t$, $\hat{s}_t$ und ε_t.

11.3. Holt-Winters Verfahren

Das Holt Verfahren wird nun so erweitert, dass auch ZR, die saisonale Schwankungen enthalten, prognostiziert werden könnnen.

Es gibt 2 Varianten, eine für eine additive und eine für eine multiplikative saisonale Komponente. Die Periode der saisonalen Komponente $\hat{s}_t$ habe die Länge p.

Die h-Schritt Prognosen für eine Periode zum Zeitpunkt T lauten ($h = 1, 2, \ldots, p$):

$$\textbf{Additiv}: \quad \hat{x}_T(h) = \hat{a}_{T+1} + \hat{b}_{T+1} \cdot h + \hat{s}_{T+h-p}$$

$$\textbf{Multiplikativ}: \quad \hat{x}_T(h) = (\hat{a}_{T+1} + \hat{b}_{T+1} \cdot h) \cdot \hat{s}_{T+h-p}$$

11.3. Holt-Winters Verfahren

Für die additive Variante lautet die Rekursion für $t = p+1, \ldots, T$:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_t &= \alpha(x_{t-1} - \hat{s}_{t-1-p}) + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) \\
\hat{b}_t &= \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1} \\
\hat{s}_{t-p} &= \gamma(x_{t-p} - \hat{a}_{t-p+1}) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-2p}
\end{aligned}$$

Die Einschritt-Vorhersagen zum Zeitpunkt $t-1$ ergeben sich daher aus der Summe der Schätzwerte von Trend, Niveau und Saison:

$$\hat{x}_{t-1}(1) = \hat{a}_t + \hat{b}_t + \hat{s}_{t-p}.$$

11.3. Holt-Winters Verfahren

Additives versus Multiplikatives Modell

Das Holt Winters Verfahren kann Saisonalität auf 2 verschiedene Arten modellierten:

- Additive Saisonalität: In Abb. 23 ist die Amplitude des saisonalen Verhaltens in etwa gleich bleibend. Daher wird für diese Daten die saisonale Komponente in additiver Form im Holt-Winters Verfahren berücksichtigt.
- Multiplikative Saisonalität In Abb. 29 ist eine mit der Zeit wachsende Amplitude erkennbar. Daher ist für diese Daten das Holt-Winters Verfahren mit multiplikativer Saisonalität passend.

11.3. Holt-Winters Verfahren

Für die multiplikative Variante lautet die Rekursion für $t = p+1, \ldots, T$:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_t &= \alpha(x_{t-1}/\hat{s}_{t-1-p}) + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) \\
\hat{b}_t &= \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1} \\
\hat{s}_{t-p} &= \gamma(x_{t-p}/\hat{a}_{t-p+1}) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-2p}
\end{aligned}$$

Die Einschritt-Vorhersagen zum Zeitpunkt $t-1$ ergeben sich daher aus den Schätzwerte von Trend, Niveau und Saison:

$$\hat{x}_{t-1}(1) = (\hat{a}_t + \hat{b}_t) \cdot \hat{s}_{t-p}.$$

11.3. Holt-Winters Verfahren

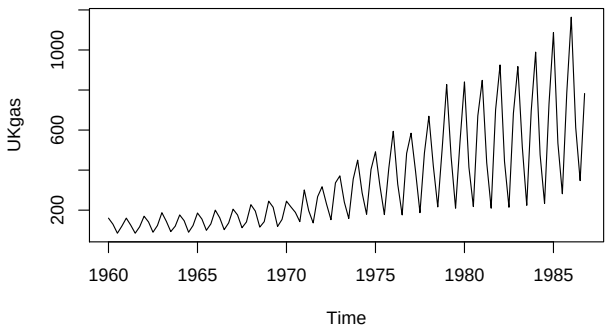
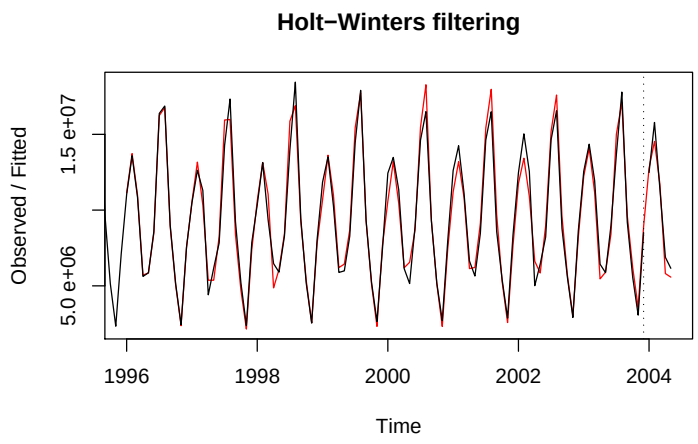


Abbildung 29: Die UKgas-Daten.

11.3. Holt-Winters Verfahren



11.3. Holt-Winters Verfahren

Man benötigt Startwerte für die Niveau- und die Trendkomponente für den Zeitpunkt $p+1$, und für die saisonalen Komponenten für die Zeitpunkte $t = 1, \ldots, p$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten solche Startwerte festzusetzen. In R können Startwerte explizit vorgegeben werden. Ansonsten wird dafür eine Saison-Trend Zerlegung mittels moving average verwendet.

11.3. Holt-Winters Verfahren

Zur Anwendung des Holt-Winters Verfahrens:

- Das additive Holt-Winters Verfahren modelliert eine ZR als Summe einer Niveau-, einer linearen Trend- und einer Saisonkomponente und ist daher geeignet ZR zu prognostizieren, die einen annähernd linearen Trend und eine annähernd konstante Saisonalität aufweisen.

- Das multiplikative Holt-Winters Verfahren ist geeignet eine ZR zu modellieren, deren Amplitude anwächst.

11.3. Holt-Winters Verfahren

Die Prognosen beim additiven Holt-Winters Verfahren über den Zeitraum der ZR hinaus lauten:

Niveau $\hat{a}_{T+1} = \alpha(x_T - \hat{s}_{T-p}) + (1-\alpha)(\hat{a}_T + \hat{b}_T)$

Trend $\hat{b}_{T+1} = \beta(\hat{a}_{T+1} - \hat{a}_T) + (1-\beta)\hat{b}_T$

Saison $\hat{s}_t = \gamma(x_t - \hat{a}_t) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-p}$, t=T-p+1,. . . ,T

$$\hat{x}_T(1) = \hat{a}_{T+1} + \hat{b}_{T+1} + \hat{s}_{T+1-p}$$
$$\hat{x}_T(h) = \hat{a}_{T+1} + \hat{b}_{T+1} \cdot h + \hat{s}_{T+h-p}, \quad h = 2, \ldots, p$$
$$\hat{x}_T(h) = \hat{a}_{T+1} + \hat{b}_{T+1} \cdot h + \hat{s}_{T+h-2p}, \quad h = p+1, \ldots, 2p$$
$usw.$

Übungen 4

Lösen Sie die folgenden Beispiele mit Hilfe von R:

1. Folgen Sie der Anleitung in "SaisonTrendinR.pdf" und rechnen Sie die dortigen Beispiele nach.

2. Laden Sie die Daten ''USAccDeaths'' in das Arbeitsverzeichnis. (Befehl: data(USAccDeaths), ist ein Datensatz, der im Package ''stats'' in R enthalten ist. Nähere Informationen können über help(''USAccDeaths'') abgefragt werden.)

   (a) Glätten Sie die ZR mit der Methode der kleinen Trends.

   (b) Führen Sie die Zerlegung mittels der R-Funktion decompose durch.

11.3. Holt-Winters Verfahren

- Die 3 Glättungsparameter α, β und γ liegen zwischen 0 und 1. α dient zur Glättung des Niveaus, β zur Glättung des linearen Trends und γ zur Glättung der Saisonalität.

- Die Glättungsparameter können auch wieder durch Minimierung der Fehlerquadratsumme zwischen Einschritt-Vorhersage und wahrem Wert der ZR geschätzt werden.

Übungen 4

   (c) Führen Sie eine klassische Saison-Trend Zerlegung mittels der R-Funktion stl durch.

   In welchem Monat ist die Saisonalität am größten, wann am geringsten?

3. In "SaisonTrendinR.pdf" wurden die Nächtigungsdaten der Jahre 1995-2003 mit Hilfe des Holt-Winters Verfahrens geschätzt und die ersten 5 Monate des Jahres 2004 vorhergesagt. Dort wurden schon 2 verschiedene Modellansätze dafür verwendet. Verwenden Sie nun als dritten Ansatz ein Modell, in dem Sie die Glättungsparameter von R optimieren lassen.

12. Saison-Trend Modellierung in R

Die Verfahren zur Saison-Trendzerlegung und das Holt-Winters Verfahren sind in R mit Hilfe der Funktionen decompose, stl und HoltWinters durchzuführen.

Die Erklärungen zur Anwendung stehen in "SaisonTrendinR.pdf" und können von der LV-Seite heruntergeladen werden.

Übungen 4

Welches der 3 Modelle würden Sie wählen? Wie verändert sich die Fehlerquadratsumme? Welche mittlere Fehlerquadratsumme im Prognosezeitraum ergibt sich für das dritte Modell?

4. Die ZR `''USAccDeaths''` enthält Monatsdaten für die Jahre 1973-1978. Führen Sie das Holt-Winters Verfahren für ein Modell mit Trend und eines ohne Trend durch. Wählen Sie die Glättungsparameter `alpha=0.3`, `beta=0.1`, `gamma=0.4`.

   (a) Welches Modell würden Sie wählen?

Übungen 4

   (b) Prognostizieren Sie die ersten 6 Monate des Jahres 1979 mit dem gewählten Modell. Vergleichen Sie diese Vorhersagen mit den wahren Werten aus dem `help(''USAccDeaths'')`.

5. Laden Sie die Daten `''co2''` in das Arbeitsverzeichnis. (Befehl: `data(co2)`, ist ein Datensatz, der im Package `''stats''` in `R` enthalten ist. Nähere Informationen können über `help(''co2'')` abgefragt werden.)

   Das Holt-Winters Verfahren soll verwendet werden, um die Entwicklung bis zum Jahr 2000 vorherzusagen. Zeichnen Sie die ZR und ihre Prognose. Welche Komponenten sind im Modell enthalten?